МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«Київський Політехнічний Інститут імені Ігоря Сікорського»

**Лабораторна робота №1**

Однокрокові методи

Варіант №25

виконала студентка ІІ курсу

ТЕФ групи ТВ-61

Юрченко Богдана Олегівна

Київ – 2018

**Ціль:**

визначити основні закономірності та зміну похибок, залежно від кроку, однокрокового методу розв’язання задачі Коші.

**Завдання:**

Провести розрахунки, використовуючи метод Рунге-Кутта-Фельберга 7 порядку точності, порівняти результати з аналітичним розв’язком, з розвязком із іншими кроками та за методом Рунге-Кутта 4 порядку.

Побудувати графік залежності точності від розміру кроку.

*Задача Коші*:

*  (1)*

*Початкові умови:*

*  (2)*

*Аналітичний розв’язок:*

* (3)*

**Теоретичні відомості:**

Однокроковий метод розв’язку задачі Коші – метод, що вираховує значення розв’язку наступної точки, використовуючи інформацію про поточну точку. Щоб отримати інформацію у новій точці, потрібно мати дані лише в одній попередній точці. Цю властивість називають “самостартуванням”.

Будь-яку з формул однокрокових методів можна використовувати для розв’язання систем диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь вищих порядків.

В основі всіх однокрокових методів лежить розкладання функції в ряд Тейлора, в якому зберігаються члени, що містять степені до *k* включно. Ціле число *k* називається порядком методу. Похибка на кроці має порядок *k+1*.

Використаний метод Рунге-Кутта-Фельберга 7 порядку має такі формули:

k[0] = hh \* f(xk, yk)

k[1] = hh \* f(xk + 2.0 / 27.0 \* hh, yk + 2.0 / 27.0 \* k[0])

k[2] = hh \* f(xk + 1.0 / 9.0 \* hh, yk + 1.0 / 36.0 \* k[0] + 1.0 / 12.0 \* k[1])

k[3] = hh \* f(xk + 1.0 / 6.0 \* hh, yk + 1.0 / 24.0 \* k[0] + 1.0 / 8.0 \* k[2])

k[4] = hh \* f(xk + 5.0 / 12.0 \* hh, yk + 5.0 / 12.0 \* k[0] - 25.0 / 16.0 \* k[2] + 25.0 / 16.0 \* k[3])

k[5] = hh \* f(xk + 1.0 / 2.0 \* hh, yk + 1.0 / 20.0 \* k[0] + 1.0 / 4.0 \* k[3] + 1.0 / 5.0 \* k[4])

k[6] = hh \* f(xk + 5.0 / 6.0 \* hh,yk - 25.0 / 508.0 \* k[0] + 125.0 / 508.0 \* k[3] - 65.0 / 27.0 \* k[4] + 125.0 / 54.0 \* k[5])

k[7] = hh \* f(xk + 1.0 / 6.0 \* hh,yk + 31.0 / 300.0 \* k[0] + 61.0 / 225.0 \* k[4] - 2.0 / 9.0 \* k[5] + 13.0 / 900.0 \* k[6])

k[8] = hh \* f(xk + 2.0 / 3.0 \* hh,yk + 2.0 \* k[0] - 53.0 / 6.0 \* k[3] + 704.0 / 45.0 \* k[4] - 107.0 / 9.0 \* k[5] + 67.0 / 90.0 \* k[6] +3 \* k[7])

k[9] = hh \* f(xk + 1.0 / 3.0 \* hh,yk - 91.0 / 108.0 \* k[0] + 23.0 / 108.0 \* k[3] - 976.0 / 135.0 \* k[4] + 311.0 / 54.0 \* k[5] -19.0 / 60.0 \* k[6] + 17.0 / 6.0 \* k[7] - 1.0 / 12.0 \* k[8])

k[10] = hh \* f(xk + hh, yk + 2383.0 / 4100.0 \* k[0] - 341.0 / 164.0 \* k[3] + 4496.0 / 1025.0 \* k[4] -301.0 / 82.0 \* k[5] + 2133.0 / 4100.0 \* k[6] + 45.0 / 82.0 \* k[7] + 45.0 / 164.0 \* k[8] +18.0 / 49.0 \* k[9])

y[k+1] = yk + 41.0 / 840.0 \* k[0] + 34.0 / 105.0 \* k[5] + 9.0 / 35.0 \* (k[6] + k[7]) + 9.0 / 280.0 \* (k[8] + k[9]) + 41.0 / 840.0 \* k[10]

**Результати:**

Результатом виконання програми є графіки, що зображують:

1. Точне значення функції у(х) на проміжку [0,1], графік значень, знайдених із кроком h1 = 0.5, h2 = h1/5, h3 = h1/25 методом Рунге-Кутта-Фельберга 7 порядку точності;
2. Значення абсолютної похибки на відрізку з різними кроками;
3. Значення відносної похибки значень системи диференціальних рівнянь, знайдених методом Рунге-Кутта 4 порядку.

|  |  |
| --- | --- |
| 1.5  1.0  0.5  0.0  -0.5 |  |
|  | 0 1 2 3 4 5 |

Рис. 1. Графік функції

|  |  |
| --- | --- |
| 1.0  0.5  0.0  -0.5  -1.0  -1.5 |  |
|  | 0 1 2 3 4 5 |

Рис. 2. Графік значення абсолютної похибки

|  |  |
| --- | --- |
| 6  4  2  0  -2  -4 |  |
|  | 0 2 4 6 8 10 |

Рис. 3. Графік відносної похибки розв’язку системи диф. рівнянь

**Висновки:**

Реалізовано метод розв’язання задач Коші методом Рунге-Кутта-Фельберга 7 порядку точності, а також систем диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта 4 порядку точності.

Розв’язана задача Коші відповідно до завдання. Побудовано графіки залежності похибки від кроку і методу.

За результатами виконання лабораторної роботи можна зробити наступні висновки:

1. Показано залежність точності розв’язку задачі Коші від вибраного кроку (Рис. 2). А також точність розвязку системи диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта 4-го порядку (Рис. 3).
2. Отримано результат розвязування задачі Коші (1) з початковими умовами (2).
3. Сформовано навички розв’язування задач Коші і систем диференціальних рівнянь однокроковими методами.
4. Запрограмовано однокрокові методи розвязання задач Коші і систем диференціальних рівнянь.
5. Виявлено, що метод Рунге-Кутта-Фельберга 7-го порядку дає точні результати навіть із великим кроком.

Використана література:

E. Fehlberg, *Classical Fifth-, Sixth-, Seventh- , and Eighth-Order Runge-Kutta  
Formulas with Stepsize Control*, NASA TR R-287, (1968)

William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling. Numerical Recipes in C. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1988. (Розділи 16.1 і 16.2.).